MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 14
3.2.2020

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“

1. Wir betrachten folgende Teilmengen des $\mathbb{R}^3$:
$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \right\},$$
sowie
$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y = 2 \right\}.$$
   a) Bestimmen Sie für $j = 1, 2$ jeweils die geometrische Form (d.h. den affinen Typ) des Kegelschnitts $K \cap E_j$.
   b) Der Mittelpunktswinkel des Kreiskegels K ist $\alpha = 45°$, die Achse des Kegels ist $a = \mathbb{R}\, e_3$. Was läßt sich aufgrund von a) über die Größe des Schnittwinkels φ_j von E_j und a im Vergleich zu α aussagen?

2. Betrachten Sie den Kegel
$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 - 2z^2 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3,$$
sowie die Ebene $E_\lambda \subset \mathbb{R}^3$, die den Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ enthält und den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ als Normalenvektor hat. Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß der Schnitt $K \cap E_\lambda$ eine Parabel ist. Gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß $K \cap E_\lambda$ ein sich schneidendes Geradenpaar ist?

3. Es sei $Q \subset \mathbb{R}^2$ die Menge aller Punkte, welche vom Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der Geraden $g = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ den gleichen Abstand haben. Zeigen Sie, daß Q ein Kegelschnitt ist, und bestimmen Sie seinen affinen Typ.

4. In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ mit den Koordinaten x und y werde die Ellipse E mit den Scheitelpunkten
$$(0, 3) \quad \text{und} \quad (4, -1) \qquad \text{sowie} \qquad (1, 0) \quad \text{und} \quad (3, 2)$$
betrachtet.
   a) Skizzieren Sie E im (x, y)–Koordinatensystem. Bestimmen Sie den Mittelpunkt der Ellipse E, ihre Hauptachsen sowie die Längen ihrer Hauptachsenabschnitte.
   b) Geben Sie in den Koordinaten x und y eine Gleichung für E an.

Für die Tutorien vom 3.2. und 5.2.20